江戸時代の幾何学

中　圭市　船越 勇佑

【概要】

私たちは，算額の歴史について調べた。理由は，我が校の数学者たちの質の高い数学に触れたいと思ったからである。その中でも特に幾何学に絞って学んだ。研究を通して数学の美しさの一端を見つけられた。これからの提案として，さらに幾何学の定理を学び，自分たちで独自の問題を作りたい。

We investigated the history and calculations of *Sangaku,* because we wanted to know the high quality mathematics of my school's mathematicians of *Meiji* era. We focused on geometry as our research target and we could find some part of the beauty of mathematics. As a result of this investigation, we wanted to study more geometric theorems and to make original problems.

【研究動機】

城南高校(旧徳島中学校)は，阿部有清，武田丑太郎，林鶴一などの有数の数学者を生み出している。特に数学教師として 40 年間も勤めた武田先生の論文「円理学六竜三陽表起源及用法」が資料として残っている。質の高い当時の数学に少しでも触れたいと考えた。

【算額とは】

算額とは江戸時代の日本で，額や絵馬に数学の問題や解法を記して神社や仏閣に奉納したものである。

算額は，和算において，数学の問題が解けたことを神仏に感謝し，ますます勉強に励むことを祈念して奉納されたと言われる。

重要文化財や民俗文化財に指定されているものも多い。明治時代になると，日本には西洋式数学が導入されることとなったが，算額奉納の風習は，この導入を容易にしたとも評価されている。

【研究目的】

算額の中でも特に幾何分野に絞って学び，最終的には自分たちで独自の問題を作り，コンクールに出題したいと考えた。

【研究内容の例】

算額の例を図１に示す。

書かれている内容を現代語訳にする。

自分たちで計算して，結果を参考文献に載っているものと比べる。

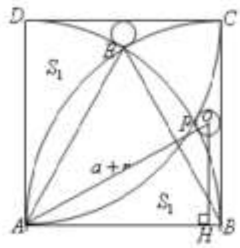
図１　算額の例

現代訳

【問題】図のように 正方形の中に象限3個、等円2個を書く。等円の直径が1寸の時、黒い部分の面積はいくらか。

【答え】黒い部分の面積は28歩3分・・・(1歩は、本来は1間(60寸)四方の面積を表す単位であるが、ここでは1寸四方の面積を1歩としている。

【術】27648を平方に開き、これを円周率に80を乗じ(かけ)たものから引き、3で割る。



等円の半径を r、正方形の１辺の長さ をaとおく。

①$\triangle AOH$において　　$AO=a+r$、$AH=a-r$

$OH=\frac{1}{2}a$　　であるから

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2+(a-r)^2=(a+r)^2$$

$$\frac{1}{4}a^2+\cancel{a^2}-2ar+\cancel{r^2}=\cancel{a^2}+2ar+\cancel{r^2}$$

$\therefore a^2=16ar$　　$a\neq 0$　より　　$a=16r=8\times 2r=8$　$(\because 2r=1)$

答え　正方形の１辺８ cm

答えの冒頭にある$\sqrt{27648}$はどこから来たかも考えた。

$$② \ \triangle ABE = 8^2\pi\times\frac{1}{6}\times 2-\triangle BAE=\frac{64}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8^2=\frac{64}{3}\pi-16\sqrt{3}$$

（1辺が a の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ である）

$ABD - \triangle ABE = S_1$とおくと　$S_1+\triangle ABE=\frac{1}{4}\times 8^2\pi=16\pi$

$$\therefore S_1=16\pi-\left(\frac{64}{3}\pi-16\sqrt{3}\right)=16\sqrt{3}-\frac{16}{3}\pi$$

従って求める斜線部分の面積を S とすると

$S+2S_1=16\pi$より

$$S=16\pi-2S_1=16\pi-2\left(16\sqrt{3}-\frac{16}{3}\pi\right)$$

$$=16\pi-32\sqrt{3}+\frac{32}{3}\pi=\frac{1}{3}(80\pi-96\sqrt{3})=\frac{1}{3}(80\pi-\sqrt{27648})$$

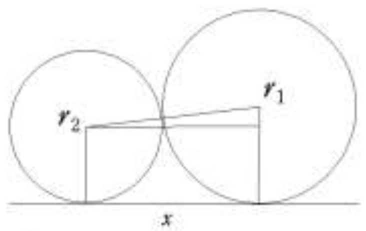
（答え）　$\frac{1}{3}(80\pi-96\sqrt{3})$

【よく使われる定理の証明】

算額の問題を解いていると，多くの問題でよく使われる定理があったので，今の数学で証明してみた。

【定理1】

相接する2円r_1, r_2 の共通接線の長さは，　$x=2\sqrt{r_1 r_2}$



（証）

$$x=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}$$

中には，有名な定理もあった。

例：トレミーの定理

円に内接する四角形 ABCD において

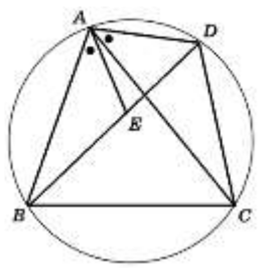
AB･CD+AD･BC＝AC･BD

△ABE∽△ACD **より**

AB:BE=AC:CD

△ABC∽△AED **より**

AC:BC=AD:DE



【演習題】

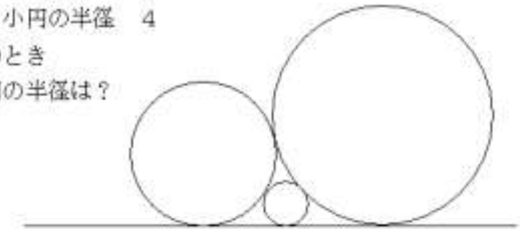
定理 1 を用いた問題を解いてみました

中円の半径　9

小円の半径　4

このとき

大円の半径は？



解法

円 B,C の接点を D とすると，AD を 2:1 に内分する点 O が外接円の中心になる。

$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BD}=\frac{5}{2}$より$\mathrm{AD}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$,

$$\mathrm{AO}=\frac{5}{2}\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\sqrt{3}$$

これより大円の直径は$5\left(\sqrt{\frac{4}{3}}+1\right)$

【今後の課題】

解法の原理はピタゴラスの定理と比例であるが，難解なものが多いため，幾何学の定理をさらに学ぶことが必要であると実感している。

新題の現代解法を追求し，自分たちで新しい問題作りを続けていきたい。

美しい解法，それから導かれる幾何学的性質，和算学者がどのように数学を考えていたか，数学的思考を探求していきたい。

【参考文献】

算額道場　佐藤健一・伊藤洋美・牧下英世著（研成社）