Σk^mの自作公式

平川　一樹

【概要】

学校では３乗までのΣの公式しか学習しない。私は「４乗以上のΣの公式はどうなっているのだろう。」と疑問を持った。そこで、Σの公式の規則性を見つけようと思った。

Σの公式を求めるための公式は全部で５つできた。できた順番に第１～第５の公式と呼ぶ。さらに第３の公式を改良して、Σの公式を求めるための筆算を作ることができた。これを「Σ階段筆算」と呼ぶ。

In school, we only learn the formula for the third of Σ. I wondered what the formula should be for the fourth power or more. And, I tried to find the rules surrounding the formula for Σ.

I have made five formulas to find the formula for Σ. In addition, I have made calculations on paper for Σ.

【研究の目的】

Σの規則性について研究し、Σの公式を求めるための公式を作る。

【研究方法】

Σの公式の規則性を見つけようにも、Σの公式の表がなければ推測することができない。そこで、まずExcelのマクロを用いて、Σの公式を求めるためのソフトを作った。それを用いてΣの公式の表を作成し、その表を用いて、その規則性を研究した。

【研究結果】

Σの公式を求めるための公式は、全部で５つできた。さらに、Σの公式を求めるための筆算である「Σ階段筆算」も作ることができた。

まず第１の公式から紹介する。

ページの都合上、第１の公式の詳しい説明は省く。

《第１の公式》

$\sum_{k=1}^{n} k^m$ の公式の左から係数を取り、数列を作る。この数列を$\{A_p\}$とする。

（ただし$1 \le p \le m+2$）

$$A_1 = \frac{1}{m+1} \quad A_{m+2} = 0$$

$2 \le p \le m+1$のとき

$$A_p = \frac{\sum_{k=1}^{m-p+2} \left({}_{m-p+1}\mathrm{C}_{k-1} \cdot (k+1)^m \cdot (-1)^{m+p+k} \right) - \sum_{k=m-p+3}^{m+1} \left(\sum_{s=1}^{m-p+3} \left({}_{m-p+2}\mathrm{C}_{s-1} \cdot s^k \cdot (-1)^{m+p+s+1} \right) \cdot A_{m-k+2} \right)}{(m-p+2)!}$$

次に作った公式は第２の公式だ。第１の公式を改良して作った。表を書く事によって、第１の公式の一部分の計算を楽に行えるようにしようと考えたのがきっかけだ。

これも、ページの都合上、詳しい説明を省く。

《第２の公式》

$\sum_{k=1}^{n} k^m$ の公式の左から係数を取り、数列を作る。この数列を$\{A_p\}$とする。

（ただし$1 \le p \le m+2$）

$$A_1 = \frac{1}{m+1} \quad A_{m+2} = 0$$

$2 \le p \le m+1$のとき

$$A_p = \frac{K_{m,m-p+3} + K_{m,m-p+2} - \sum_{k=1}^{p-1} \left(K_{m-i+2,m-p+3} \cdot A_k \right)}{(m-p+2)!}$$

ここで、t , yを０以上の整数とすると

$K_{t,0} = 0$, $K_{t,1} = 1$, $t+1<y$ならば$K_{t,y} = 0$

$x \ge 1, y \ge 1$のとき

$$K_{t,y} = (y-1) \cdot K_{t-1,y-1} + y \cdot K_{t-1}$$

次に作った公式は第３の公式だ。第３の公式は計算量も第１・第２の公式より少なくなった。∑の数列の階差が$(n+1)^m$となる事を用いて作った。これも、詳しい説明は省く。

《第３の公式》

$\sum_{k=1}^{n} k^m$ の公式の左から係数を取り、数列を作る。この数列を$\{A_p\}$とする。

（ただし$1 \le p \le m+2$）

$$A_1 = \frac{1}{m+1} \quad A_{m+2} = 0$$

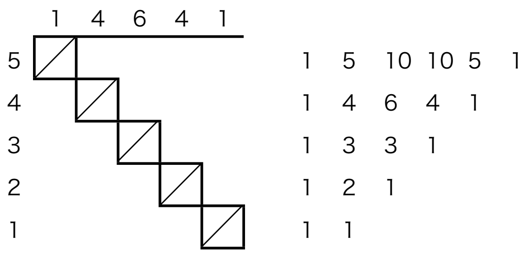
$$A_p = \frac{{}_mC_{p\text{-}1} - \sum_{k=1}^{p\text{-}1} \left({}_{m\text{-}k+2}C_{p\text{-}k+1} \cdot A_k \right)}{m - p + 2}$$

公式ではないが、第３の公式を改良して、Σの公式を求めるための筆算を作る事ができた。この筆算を「Σ階段筆算」と呼ぶ。

《∑階段筆算》

＜例＞

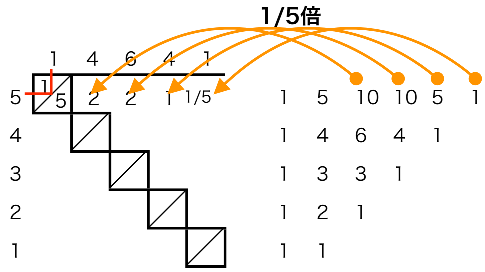
$\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めるとする。



(1) m=4なので下の図のように５段の階段を書く。

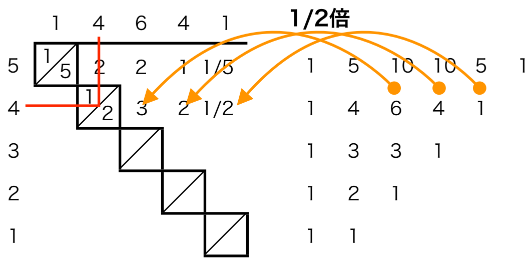
(2) 階段の右側に下からパスカルの三角形を書く。

(3) 階段の上側に右側に書いてある数字の上から２段目にある数字を書く。



(1) 階段の上側の一番左の値を５段目の５で割った結果を階段のマス目に書く。

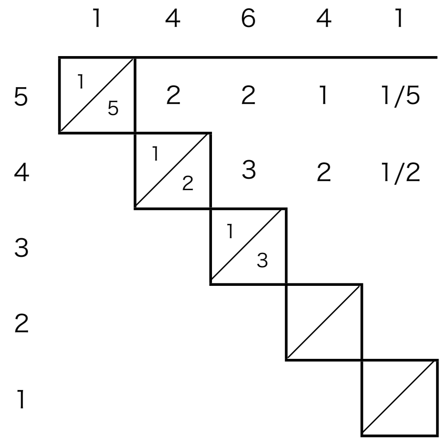
(2) 階段のマス目に書いてある値を階段の右側に書いてある値に掛けたものを右側の空白に書く。

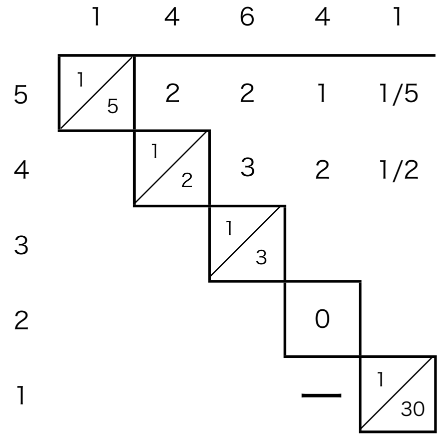


(1) 上の図の縦の線に注目して4-2=2をする。その２を４段目の４で割り、結果を階段のマス目に書く。

(2) 階段のマス目に書いてある値を階段の右側に書いてある値に掛けたものを右側の空白に書く。

同じようにして…





最後に階段のマス目に書いてある値に注目すると…

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

となる。

次に第４の公式を紹介する。第４の公式はΣの公式のnの係数がベルヌーイ数となっていた事がきっかけとなって見つける事ができた。まずベルヌーイ数から紹介する。

ベルヌーイ数はBを使って定義する数列だ。奇数番目はn＝１以外は全て０である。しかし、n＝１以外という条件がつくだけ

で、式で表すのがとても難しい。それだけで、自分はさっぱりだった。

一般に知られている漸化式は…

$$B_0 = 1\ ,\ B_n = -\ \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left({}_{n+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \right)$$

となる。

このように漸化式でしか求める事ができないので、ベルヌーイ数を求めるのは容易ではない。B_{20}を求めたい場合はB_0〜B_{19}の全てのベルヌーイ数を使わなければならない。

第２１項まで算出すると…

n	分子	分母
0	1	1
1	-1	2
2	1	6
3	0	1
4	-1	30
5	0	1
6	1	42
7	0	1
8	-1	30
9	0	1
10	5	66

n	分子	分母
11	0	1
12	-691	2730
13	0	1
14	7	6
15	0	1
16	-3617	510
17	0	1
18	43867	798
19	0	1
20	-174611	330
21	0	1

《第４の公式》

＜例＞

$\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めるとする。

	${}_5\mathrm{C}_0$	${}_5\mathrm{C}_1$	${}_5\mathrm{C}_2$	${}_5\mathrm{C}_3$	${}_5\mathrm{C}_4$
	↓	↓	↓	↓	↓
	1	**5**	**10**	**10**	**5**
	↓	↓	↓	↓	↓
1/5倍する	**1/5**	**1**	**2**	**2**	**1**
	↓*B_0	↓*B_1	↓*B_2	↓*B_3	↓*B_4
左から順番に ベルヌーイ数を掛ける	**1/5**	**-1/2**	**1/3**	**0**	**-1/30**
	↓	↓ *-1	↓	↓ *-1	↓
左から偶数番目に -1を掛ける	**<u>1/5</u>**	**<u>1/2</u>**	**<u>1/3</u>**	**<u>0</u>**	**<u>-1/30</u>**

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

となる。

これを、文字を使って一般化すると…

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{{}_{m+1}C_k}{m+1} \cdot B_k \cdot (-1)^k \cdot n^{m-k+1} \right)$$

となる。

最後に第５の公式を紹介する。第５の公式はΣの公式の表を見ているとき、各項を何倍すれば次のΣの公式になるのかを調べたときに思いついた公式だ。

《第５の公式》

＜例＞

$\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めるとする。

これを求めるために、

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

を用いる。

(1) 左辺はΣの中身だけ、右辺は全体を不定積分する。

$$\sum_{k=1}^{n} \int (k^3) = \int \left(\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \right)$$

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} (k^4 + \mathrm{C}) = \frac{1}{20}n^5 + \frac{1}{8}n^4 + \frac{1}{12}n^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \mathrm{C}n$$

(2) 右辺の係数の合計が１となるようにCの値を決める。

1/5 + 1/2 + 1/3 = 31/30 より、C = -1/30

とすれば良いことが分かる

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{4}n^3 - \frac{1}{30}n$$

【考察】

作った公式のうち、一番計算量が少なかったのが第５の公式だ。しかし、いきなり高い次数の公式を求める時、一つ次数の低い公式を用いなければ求める事ができない。なので、$\sum k^{20}$を求めようと思うと、$\sum k^0$〜$\sum k^{19}$を全て求めて、$\sum k^{20}$を求めなければならない。これはこの公式の欠点だろう。

このような場合には∑階段筆算が適している。∑階段筆算は、第５の公式よりは計算量が多いものの、一つ次数の低い公式を必要としないものの中では一番計算量が少ない。

つまり、いきなり高い次数を求める場合は∑階段筆算、一つ前の公式を利用して次の公式を求める場合や∑の公式の表を作りたい場合などは第５の公式が適していると思う。

公式名
特徴
使用するための条件（準備）

第１の公式
初めて考えた公式。この公式を使うための条件はいらない。しかし、とても計算量が多く使い物にならない。
条件なし

改良

第２の公式
表を描くことで第１の公式よりは計算量を少なくすることができた。しかしまだまだ計算量は多く、表を書く手間もかかる。
表の作成

第３の公式
使うための条件がいらない公式の中では、一番計算量が少ない公式。しかし、手で計算すると少し時間がかかる。
条件なし

改良

Σ階段筆算
第３の公式をもとにした。筆算を書くことで計算量が少なくなる。一つ次数の低い公式を用いなくても良いものの中では一番計算量が少ない。とても簡明な方法。
筆算の作図

第４の公式
Σの公式の最小次数のnの係数がベルヌーイ数となることで考えた公式。計算量は少なめ。しかし、ベルヌーイ数は漸化式でしか求められないことが欠点。
ベルヌーイ数を使用

第５の公式
求めるΣの公式の一つ次数の低い公式を用いることで計算量をかなり少なくすることができた。全ての公式の中で一番計算量が少ない。
一つ前の公式を使用

【感想】

ここまで研究を振り返って、自分としてはとても楽しい研究だ。今まで感じていた疑問を解決することができたような達成感もある。作ったΣの公式を表にまとめてみると、まだまだいろいろな規則性がありそうだ。例えば、Σの公式のそれぞれの項の係数に注目してみると分母の約数が妙に共通しているような感もある。とても興味深いと思った。

これからは、更に便利な公式も考えたい。公式だけに限らず、筆算を考えたり、図形的に解く方法も考え、工夫していきたい。