３×３行列を用いての空間におけるグラフの移動

田中　飛鳥　　大田　菜穂

【概要】

座標平面上の放物線や円を１次変換を用いて移動する方法を応用し、座標空間上の点や長方形が移動できるかを研究しようと考えた。座標平面上では、２×２行列により移動した像を求めることができる。そのことを、グラフソフトを用いて検証した。また、座標空間においても、一部の回転移動については３×３行列を用いて表すことが可能であることが確認できた。さらに、座標平面上と同様に２つの行列の積を用いて、２種類の移動を組み合わせることも可能であると予想できる。

We studied whether a singular point or a rectangle can move in 3D space by translating the polygon within the plane using linear transformation. We found that we can move the polygon within the plane using a 2x2 matrix. We tested this using graph software. We could also confirm that one of the rotations can be shown using a 3x3 matrix. We think we will also be able to combine the two kinds of movement by using two 3x3 matrices.

【研究の内容】

（１） 座標平面上では、１次変換を表す行列は２×２の正方行列であり、点の座標を列ベクトルで表現し、行列を左側からかけることによってその像が求められる。そこで、もとのグラフ上の点を媒介変数表示し、その点を行列で移動して媒介変数表示を消去することでグラフの像の方程式を求める。

（２） 空間においては、数学Ｂで平面ベクトル（２次元）から空間ベクトル（３次元）へ拡張したように、空間においても、点の位置ベクトルを列ベクトルで表し、３×３行列を用いて移動させる。

（３） 空間においても、グラフ上の点を媒介変数表示し、３×３行列を用いてその像を求める。

【研究の方法】

（１）数学Ｃの教科書「数学Ｃ　東京書籍」により、３年生で学習する「行列とその応用」について学習し、行列および１次変換の性質と計算方法を身につける。

（２）座標平面上において、原点からの距離を拡大する移動、対称移動、原点のまわりの回転移動の１次変換を表す２×２行列を求め、点、直線、放物線、円、楕円といったグラフの像を表す方程式を計算する。

（３）グラフソフト（GRAPES、function view など）を用いて、もとのグラフとその像を描き、グラフが実際に移動できているかを確認する。

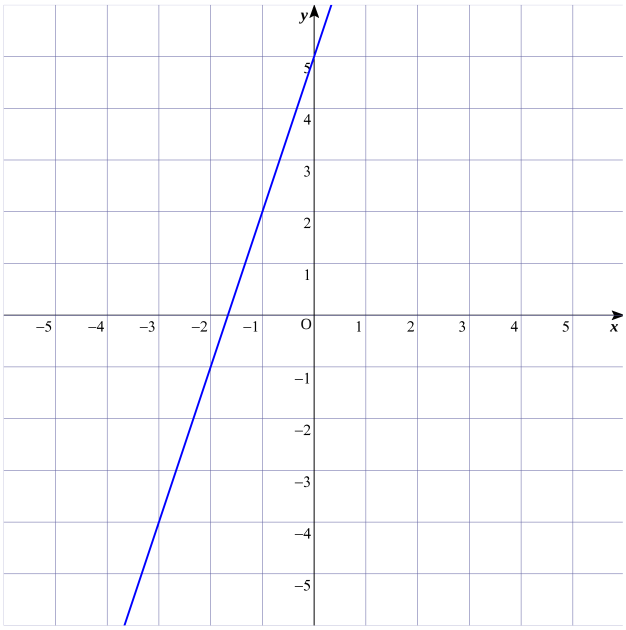
（４）座標平面上での拡大、対称移動、原点のまわりの回転移動を表す行列をどのように応用すれば、空間でも同様の移動を表すことができるかを研究する。

（５）空間での移動を３×３行列で表現し、実際に点を移動させてみて、グラフソフトを用いて確認する。

（６）媒介変数表示を用いて、空間で直線や平面の移動が可能か研究し、グラフソフトで確認する。

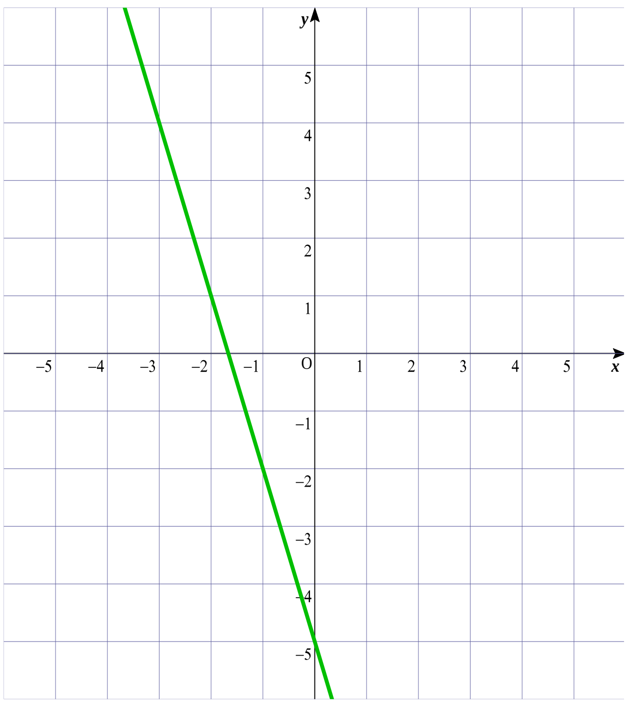
【平面での直線の移動】

直線ｙ＝３ｘ＋５とおく。



この直線をｘ軸対称の

行列$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$を用いて移動させる。



直線ｙ＝３ｘ＋５はｙ＝－３ｘ－５に移動する。

（計算式）

ｙ＝３ｘ＋５上の点を（ｓ，ｔ）とおくと、

ｙ＝３ｘ＋５はｔ＝３ｓ＋５と表せられ、

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$$

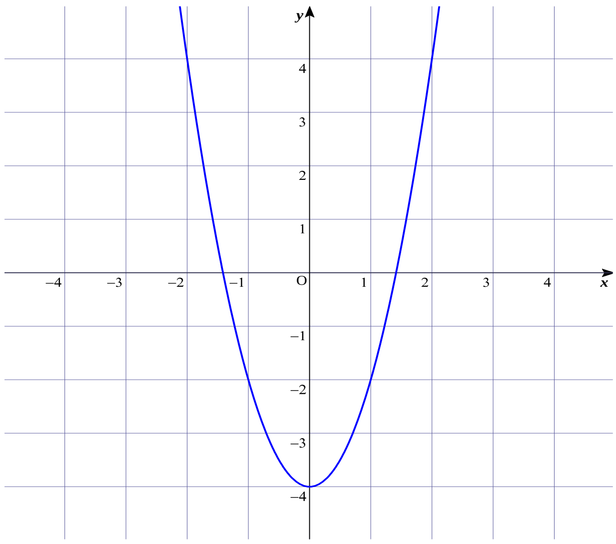
$$=\begin{pmatrix}-s\\t\end{pmatrix}$$

より $\begin{aligned}s&=-x\\t&=y\end{aligned}$

∴ｙ＝－３ｘ＋５

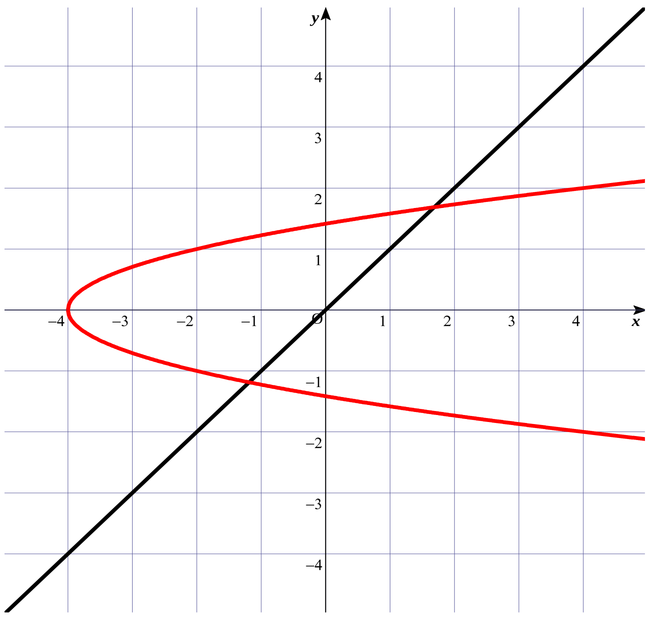
【平面での放物線の移動】

放物線$ｙ＝２ｘ^2－４$とおく。



この放物線をｙ＝ｘに関して

対称の行列$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$を用いて移動する。



放物線$ｙ＝２ｘ^2－４$は$ｙ^2＝\dfrac{x+4}{2}$

に移動する。（計算略）

【空間での長方形の移動】

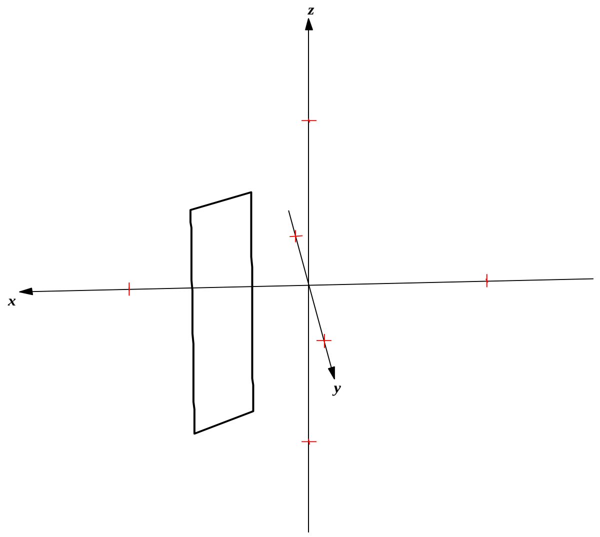
長方形の式を媒介変数 t を用いて

x=F1(t)

y=F1(t)

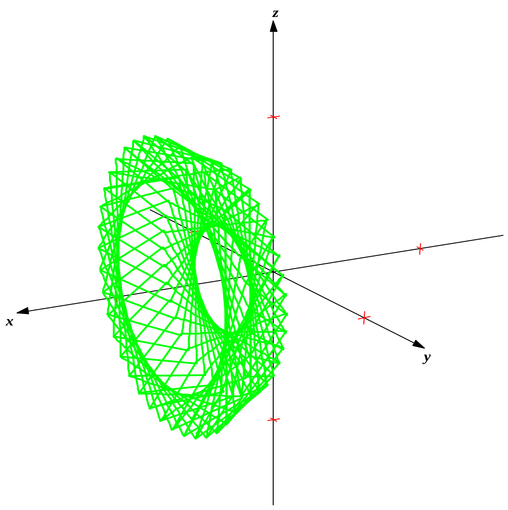
z=F2(t)と表す。

(ただし、F１(t)=[2＋0. 5cos t]、F２(t)=2sin t とする。)



この長方形を x 軸のまわりの回転移動を

表す行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を用いて移動する。



長方形　x=F1(t)

y=F1(t)

z=F2(t)　は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で

x=F1(t)

y=F1(t)cos θ －F2(t)sin θ

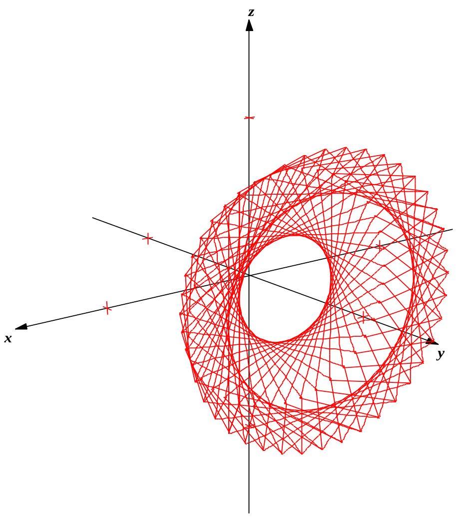
z=F1(t)sin θ ＋F2(t)cos θ

で表される長方形に移動する。

その像は上図のようになる。(計算略)

この長方形を y 軸のまわりの回転移動を

表す行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ を用いて移動する。



長方形　x=F1(t)

y=F1(t)

z=F2(t)　は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で

x=F1(t)cos θ —F2(t)sin θ

y=F1(t)

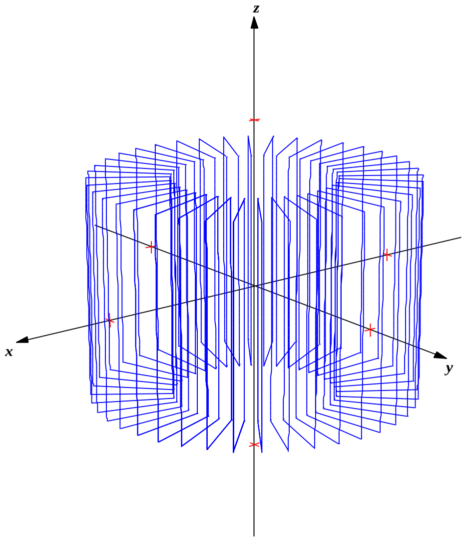
z=F1(t)sin θ ＋F2(t)cos θ

で表される長方形に移動する。

その像は上図のようになる。(計算略)

この長方形を z 軸のまわりの回転移動を

表す行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて移動する。



長方形　x=F1(t)

y=F1(t)

z=F2(t)　は０≦θ≦２πの範囲で

x=F1(t)cosθ—F1(t)sinθ

y=F1(t)sinθ＋F1cosθ

z= F2(t)

で表される長方形に移動する。

その像は上図のようになる。(計算略)

【結果】

座標平面上では、２×２行列を用いて、点やグラフをｘ軸、ｙ軸、原点、ｙ＝ｘに関してそれぞれ対称移動させたり原点の周りに回転させたり、さらに原点からの距離を拡大したりした像を求めることができる。また、空間においても､点や平面を3×3行列を用いて、座標平面と同様に対称移動や回転移動あるいは、原点からの距離の拡大については、一部の移動において可能であることが確認できた。平面と同様に、これらの行列の積を考えることで２種類以上の移動を組み合わせることも可能であると予想できる。今回は時間の都合で行えなかったが、今後は回転移動や対称移動のさまざまな組み合わせをつくって、実際に移動できるのかを研究していきたいと思う。

【引用文献】

数学Ｃの教科書「数学Ｃ　東京書籍」

グラフソフト（GRAPES、function view ）